[技術報告] 有限ひずみ関連式とせん断ひずみの概要把握法の図解例

島田耕史1)

25

キーワード:有限ひずみ、せん断ひずみ、モール円、幾何学的図解、作図法

1. はじめに

近年,地球科学的研究開発は多様な専門的背景を持つメ ンバーの共同作業によって進められている.変動帯に位置 する我が国では,分析用試料がどのような変形を受けてき たのかを理解しておくことが重要である.地質図上で同じ 地質体として示されていても,変形の程度は異なることが あり,室内分析による差異が認められるならば変形の程度 を考慮する必要が生じるし,逆に変形の程度に応じた分析 試料採取戦略の必要性も生じるであろう.こうしたとき,研究 開発の可能な限り早期の段階から,構造地質学的観点によ る変形構造の解釈を示していくことが期待される.

地質体の変形の程度を表すとき,元の状態に対する長さ 変化や角度変化で表現する無次元量が**ひずみ**である.**有限 ひずみ**は,微小変形の仮定が適用できる無限小ひずみに対 し,適用できない程度に大きく形や大きさが変化した状態の記 述に用いられる.地質学的な変形では,ひずみは有限ひずみ である(垣見・加藤,1994).有限ひずみの解析法の大半は 前世紀に確立され,変形構造から多くの情報が引き出されて きた(例えば,Ramsay and Huber, 1983).しかし,確立さ れた数式の適用によって定量的なひずみ解析結果が機械的に 得られるとしても,結果を説明する際には数式や理論を理解し, 適用範囲の限界を押さえておく必要があろう.

自学や参考のために技術者が手に取りやすい構造地質学 の邦文教科書では、変形の程度の幾何学を表すひずみに関 連する式が天下り的に示されたり、導出を他書に譲ること が主流で、一方で理論的背景の解説は専門性が高いなどの ため(例えば、狩野・村田、1998;中島ほか、2004;天野・ 狩野、2009;金川、2011;山路、2016a)、ひずみ関係式 の詳細な導出については別の参考資料が必要な状況と思わ れる.ひずみ関係式の幾何学的な図解例は式の導出と自学 を助け,かつ異分野の専門家から見ても変形の幾何学のわ かりやすい表現を可能とし,変形構造の解釈について共通 認識を持った議論のために有用と考えられるが,こうした 邦文はほとんどない.

邦文参考資料が少ない現在の状況は,技術伝承上の問題, っまり,ひずみ解析法の習得や結果説明の困難さを増やし, 技術利用の頻度低下や途絶をもたらす可能性も想起させ る.そこで,本報告は構造地質学の専門的教育を受けたこ とがない技術者を主な読者として想定し,教科書的文献の ひずみ関係式の幾何学的図解を充実させて自学の参考に供 し,これらの適用例として地質体の有限ひずみの概要を野 外地質調査の現場で把握できるような作図法をいくつか紹 介する.幾何学的図解は,専門家に対しては,非専門家や 後進に対する説明方法の一例となるかもしれない.そこで 教科書などのひずみ関係式を理解するための参考資料とす るだけでなく,地質構造評価の技術伝承や技術移転にも役 立つことを企図し,技術報告としてとりまとめた.紙面の 制約と筆者の経験から,本報告では主に延性せん断帯を例 として取り上げる.

2. 有限ひずみと基本的な長さ・角度変化の表現

一般に,地殻中の物質の変位・変形は,並進,剛体回転, ひずみ(大きさや形の変化)の合成として示される.変形 は,剛体回転とひずみの合成である.**剛体回転**(図1)は, ある領域(例えば球)のある軸のまわりの回転で,球内部 の構成要素同士の距離は変わらない.**ひずみ**(strain)は, ある領域内部の構成要素同士の相対的な長さや角度の変化 である.ひずみにより,球はその体積も変化させながら楕 円体に変化するが,本報告では体積一定,さらに,二次元

shimada.koji@jaea.go.jp ¹⁾ Geoscientific Research Department, Tono Geoscience Center, Sector of Nuclear Fuel, Decommissioning and Waste Management Technology Development, Japan Atomic Energy Agency 959-31, Jorinji, Izumicho, Toki-shi, Gifu, 509-5102, Japan

2019 年 5 月 10 日受付, 2019 年 8 月 26 日受理. © 2019 Hiruzen Institute for Geology and Chronology. All rights reserved.

Engineering Geology of Japan, No. 9, 25-40 (2019) Diagrams for finite strain equations and rough estimation of shear strain Koji Shimada¹⁾



図1 変位・変形の成分のうち,変形を構成する剛体回転とひ ずみの模式図.



図 2 (a) 長さの変化.(b) 角せん断とせん断ひずみ.(c) 主方向の直感的把握のためのペーパーバック書籍利用方法の模式図.(d) 変形前後の主方向の例.

構造地質学では、変形の実態が三次元であること踏まえ つつ,最も変形を把握しやすい断面(二次元変形)形状に よる把握が基本となる(図1).半径1の球がひずみ,楕 円体に変化したとき,最大主半径(X)方向のX軸と,こ れに直交する最小主半径(Z)方向のZ軸とを定めること ができ、両軸に直交する中間主半径(Y)方向のY軸が定 められる.この楕円体 XYZ をひずみ楕円体と呼ぶ.XYZ =1のとき、体積変化はない. さらにY = 1かつXZ = 1のとき, XZ 断面における面積一定の二次元変形として議 論できる.本報告では、紙面を XZ 面とし、面積一定の二 次元変形について解説する.したがって、Y軸と直交した 面で観察ができていること, XZ 面で面積一定が保証でき ること、という条件が達成されない場合、本報告で述べる 方法による厳密な議論は不可能である. そして, 調査時に 初見でこれらの条件をクリアできることはまれであること から、得られるひずみは概要把握にとどまることが多いで あろう. 説明は、ひずみ楕円体ではなくひずみ楕円につい てのものとなるが、誤解なく理解できると思われる場合に は単に楕円と書く場合がある.

長さ変化の基本的な表現として, extension, stretch, quadratic elongation を Ramsay (1967) に従って導入す る. これらは、図 2(a) に示すように、変形前の長さを l_0 , 変形後の長さを l_1 として次のような式で表される. extension:

$$e = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad (1)$$

e>0の場合は elongation, e<0の場合は shortening である. stretch:

 $1 + e = \frac{l_1}{l_0}$ (2)

quadratic elongation : $\lambda = (1+e)^2 = \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2$ (3)

用いられる記号や用語は英語,日本語を問わず不統一で ある.例えば, extension として ε を用いる例(ジェーガ ー,1968;狩野・村田,1998), quadratic elongation の実 体は stretch の二乗であることから実体に合わせて quadratic stretch と呼ぶほうが良いとの指摘(Fossen, 2016)がある.したがって,本報告では式(1)~(3)による 定義を示し,和訳は示さない.図1のひずみ楕円体では, X は最大 stretch, Z は最小 stretch であり,本報告で解説 する XZ 断面のひずみ楕円では,X に関するものの添字を 1,Z に関するものの添字を2 として示すと,XZ = 1 から,

$$1 + e_1 = \sqrt{\lambda_1} = X = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{1}{1 + e_2} \quad (4)$$

任意の方向の stretch は,

$$1 + e = \sqrt{\lambda} \quad (5)$$

ひずみ楕円の軸比は,最大 stretch (*X*) と最小 stretch (*Z*)の比

$$R = \frac{1 + e_1}{1 + e_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{X}{Z} \quad (6)$$

である. e と λ の添字は, Ramsay (1967), 狩野・村田 (1998)の二次元ひずみ楕円の説明と対応するよう, 最大 を 1, 最小を 2 とした. また, ひずみ楕円の最大主半径の 2 倍, 最小主半径の 2 倍を, それぞれ**ひずみ楕円の長軸**と **短軸**と呼び, 長軸, 短軸をあわせて主軸と呼ぶ.

角度変化の基本的な表現として, angular shear (角せん断), shear strain (せん断ひずみ)を図 2(b) に示す. これらの用語は多くの文献で統一されているので,主に和訳を用いる.角せん断 ψ (プシ)は,もともと直交する方向から変化した角度であり,図 2(b)の AO 方向のせん断ひずみ γ (ガンマ)は,角せん断のタンジェントとして

$$\left[\text{Eq.1} \right] \qquad \gamma = \tan \psi = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

と定義される. $\overline{AB} = 1$ ならば, $\overline{BC} = \gamma$ である.なお, 点 Oは BC の中点から, BC と平行で点 A を通る線に下し た垂線の足である.

ここで,【Eq. **】との表記は,ひずみ解析で重要な関 係式で,表1に挙げる式であることを示す.本報告では, ひずみ解析で重要な関係式を順に示し,その幾何学的説明 をしていく.本文中でも【Eq. **】を用い,表1や既述さ れた式を参照することとし,式ごとの文献の引用は基本的 に省略する.

もう一つ,ひずみ解析で重要な概念として,**主方向** (principal direction)(図2(c),(d))を示す.変形前に互 いに直交しており,変形後も互いに直交している二直線の 方向を主方向という(中川・神戸,1959).図2(c)は、ペ ーパーバック(書籍)を曲げたり伸ばしたりすることによ り変形前後の主方向を直感的に理解する方法の解説であ る. ここで, 左側の絵は書籍を曲げ, 戻す様子, 右側はこ の曲げに対応した円が描かれた部分の拡大図である.(イ) は書籍の天や地の小口側に描いた円、(ロ)は書籍を曲げ たときに見られる円から楕円への変形、(ハ)は楕円の長 軸方向と短軸方向に互いに直交する線を描いた様子で、こ の二直線の方向が変形後の主方向であり、(ニ)は書籍の 曲げを元に戻していく途中段階の様子、(ホ)は円に戻っ た様子で、(ホ)の二直線の方向が変形前の主方向である. (ニ)の段階からわかるように、変形の途中段階の二直線 は直交しなくてもよく, 主方向はあくまで変形前と変形後 の二直線の直交について与えられる概念である. 図2(d) は、図2(b)に示したせん断ひずみ yの変形のときに、変 形前の主方向であり互いに直交する二直線 OL と OJ の方 向が、変形後の主方向であり互いに直交する二直線 OL'と OJ'の方向に変化する様子である.変形前の主方向は変形 によって変形後の主方向すなわち楕円の主軸方向となる (中川・神戸, 1959; 垣見・加藤, 1994). ここで FG, JJ', LL'の方向は図 2(b)の BC の方向と平行である。変形 前の主方向である OL 方向が OG となす角θは,変形後の 主方向である OL' 方向が OG となす角 θ' へ変化し,変形 前後で主方向は一致しない、変形前後で主方向が一致しな い変形が非共軸変形であり、変形前後で主方向が一致する 変形が共軸変形である。本報告で述べるようなせん断帯の 例では、一般的に非共軸変形が生じている.次章で述べる 単純せん断は,非共軸変形の代表的なものの一つである.

有限ひずみ関連式は、図2に示す長さ変化、角度変化、 主方向の変化と、ひずみ楕円の軸比、物体中で主方向に対 してある角度・長さを持った物質線のひずみ等を相互に関 連づける式群であり、変形の程度を測るマーカーの有無や 種類に応じて限定される測定可能な量からひずみに関する 情報を引き出すツールである. 有限ひずみの解析は岩体の 延性的な変形を対象に発展してきたが、多数の破断面が入 るような変形でも検討可能である(山路、2016b). 有限 ひずみが得られると、変形の程度の地域変化が把握できる だけでなく、室内実験との比較による物性の情報や、ひず み速度で割ることによる変形期間の情報が得られることに なる. 例えば、せん断ひずみが 10 ならば、ひずみ速度を 一般的とされる 10⁻¹⁴/s オーダー(例えば、狩野・村田、 1998)とすれば、変形期間は 1000 万年オーダーという情 報が得られる.

3. 単純せん断と課題の確認

単純せん断は、円や正方形が、XZ 面上で楕円や平行四 辺形に変形するとき、図 3(a) に示すように、ある一方向 の幅は変わらず、これと直交する方向の多数の面に沿った ずれが生じたとみなせる変形である.この多数の面はせん 断面と呼ばれる.せん断帯のひずみ解析で用いられる関係 式は、単純せん断を仮定して与えられたものが多く、本報 告でも単純せん断を仮定し、せん断帯は単純せん断帯を指

表1 本報告で示す式(式番号【Eq.**】)と教科書類の式の比較.表中の「→」の左側が各文献で用いられる記号,右側が本報告で用いる記号である.

関係する変数	式番号	本論における式	教科書 (*:論文)									
			Ramsay (1967)	Treagus (1981) *	Ramsay and Huber (1983)	垣見 ・加藤 (1994)	平ほか (1997)	Park (1997)	狩野 ・村田 (1998)	中島ほか (2004)	天野 ・狩野 (2009)	金川 (2011)
せん断ひずみ (γ) ⇔ 角せん断 (ψ)	Eq. 1	$\gamma = \tan \psi$	eq. (3.38) (square root)		eq.(A.7)	$eq.(2.32)$ $c \to \gamma$ $\alpha \to \psi$		eq.(6.3)	p. 59		p.20	eq.(1.52)
せん断ひずみ (γ) ⇔ 変形前 (α) と変形後 (α') の岩脈や鉱物脈の 方向	Eq. 2	$\gamma = \cot \alpha' - \cot \alpha$	eq. (3-71)		eq. (2.3)			eq.(10.4)				
せん断ひずみ(γ)⇔ 面構造(ひずみ楕円長軸)の方向(θ')	Eq. 3	$\gamma = \frac{2}{\tan 2\theta'}$		eq.(2)	eq. (2.4)	eq.(2.36) $c \rightarrow \gamma$	eq.(4.21) cot 2 $\xi \rightarrow$ 1 / tan 2 θ '	eq.(10.5)		p.114 $\theta \rightarrow \theta$ '		eq.(1.83) $\phi \rightarrow \theta$ ' $\dot{\gamma}t \rightarrow \gamma$
ひずみ楕円の長軸のstretch(X) ⇔ ひずみ楕円の長軸方向(θ')	Eq. 4	$X = \cot \theta'$		eq.(1)								
せん断ひずみ (γ) ⇔ ひずみ楕円の主stretch (X, Z)	Eq. 5	$\gamma = X - Z = X - \frac{1}{X}$		eq.(3)								
	Eq. 6	$X = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} + \gamma}{2}$ $Z = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma}{2}$		eq.(4), (5)								
変形後にひずみ楕円長軸方向となる変形前の 主方向と変形前の着目する線がなす角(θ) ⇔ 変形後のひずみ楕円長軸方向と着目する線が なす角(θ) ⇔ ひずみ楕円の軸比(R)	Eq. 7	$\tan\theta' = \frac{\tan\theta}{R}$ $(R = \sqrt{\lambda_1}/\sqrt{\lambda_2})$	eq.(3.34)		eq.(8.3), (D.13) $\phi' \rightarrow \theta'$ $\phi \rightarrow \theta$			eq.(6.4), (6.5) $\alpha' \rightarrow \theta'$ $\alpha \rightarrow \theta$ $\theta_2/\theta_1 \rightarrow 1/R$	p.59			
ひずみ楕円の軸比(R) ↔ せん断ひずみ(y)	Eq. 8	$R = \frac{(\gamma^2 + 2) + \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2}$ $= \frac{2}{(\gamma^2 + 2) - \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}}$	eq.(3-67) $\lambda_1 \rightarrow R$ $\lambda_2 \rightarrow 1/R$	eq.(6) $\chi^2 \rightarrow R$	eq. (2.7) $\lambda_1 \rightarrow R$ $\lambda_2 \rightarrow 1/R$							
	Eq. 9	$R^{2} = \frac{(\gamma^{2} + 2) + \gamma \sqrt{\gamma^{2} + 4}}{(\gamma^{2} + 2) - \gamma \sqrt{\gamma^{2} + 4}}$	(0, 00)				eq.(4.22)					
	Eq. 10	$\gamma^2 + 2 = R + \frac{1}{R}$	eq.(3-66) r ² → <i>R</i>									
せん断ひずみ (γ) ⇔ ひずみ楕円の軸比 (R) ⇔ 変形前後で長さ変化がない方向の変形前の方向と 変形前の主方向がなす角 (θ)	Eq. 11	$\gamma = \left(R - \frac{1}{R}\right)\cos\theta\sin\theta$			eq.(8.4) $\phi \rightarrow \theta$							
変形後のひずみ楕円長軸方向と着目する線が なす角(φ')⇔ 着目する線の角せん断(ψ)⇔ ひずみ楕円の軸比(R)	Eq. 12	$R^{2} = \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{2}} = \frac{\tan(\psi + \phi')}{\tan \phi'}$ $= \frac{1}{\tan \phi' \tan(90^{\circ} - \psi - \phi')}$	eq.(5-35) θ'→φ'					eq.(8.4b) $\theta' \rightarrow \phi'$ $Y'^2 \rightarrow \lambda_2$ $X'^2 \rightarrow \lambda_1$	p.68,69 θ'→φ'			
せん断ひずみ (γ) ⇔ ひずみ楕円の軸比 (R) ⇔ 変形後のひずみ楕円長軸方向と着目する線が なす角 (φ')	Eq. 13	$\gamma = \frac{(R^2 - 1)\tan\phi'}{1 + R^2 \tan^2\phi'}$			eq.(8.5), (D.18)							
 (ひずみの基礎方程式・ひずみ方程式) 任意方向のstretchの相反二次値 (λ') ⇒ ひずみ楕円の主stretchの相反二次値 (λ'₁, λ'₂) ⇒ 任意方向の線がひずみ楕円長軸となす角 (φ') 	Eq. 14	$\lambda' = \lambda'_1 \mathrm{cos}^2 \phi' + \lambda'_2 \mathrm{sin}^2 \phi'$	eq.(3.31) $\theta' \rightarrow \phi'$		eq.(D.7)				p.59 θ'→φ'			
	Eq. 15	$\lambda' = \frac{\lambda'_2 + \lambda'_1}{2} - \frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2} \cos 2\phi'$	eq.(3.49) θ'→φ'		eq.(6.9), (D.8)				p.60 θ'→φ'		eq.(A2 · 12) $\theta \rightarrow \phi$ '	
 (ひずみの基礎方程式・ひずみ方程式) 任意方向の線のstretchの二乗に対する せん断ひずみの比 (γ/λ) ⇔ 	Eq. 16	$\frac{\gamma}{\lambda} = (\lambda_2' - \lambda_1')\sin\phi'\cos\phi'$	eq.(3.42) θ'→φ'		eq.(D.16)				p.59 θ'→φ'			
ひずみ楕円の主stretchの相反二次値 $(\lambda'_1, \lambda'_2) \Leftrightarrow$ 任意方向の線がひずみ楕円長軸となす角 (ϕ')	Eq. 17	$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{\lambda_2' - \lambda_1'}{2} \sin 2\phi'$	eq.(3-50) $\gamma' \rightarrow \gamma / \lambda$ $\theta' \rightarrow \phi'$		eq.(6.10), (D.17) $\gamma' \rightarrow \gamma / \lambda$				p.60 θ'→φ'		eq.(A2 · 13) $\theta \rightarrow \phi$ '	

す. 図 3(b, c) の *ABCO* は, 図 2(b) と相似形で, *D* ~ *G* は後の図との対応のために加えた.

図 3(b) では、円が【Eq.1】で示されるせん断ひずみに よりひずみ楕円に変化する様子が示されており、ひずみ楕 円の長軸方向とせん断面とのなす角を θ' とする.元々面 構造を持たない岩体中に形成されたせん断帯(マイロナイ ト帯など)内部の変形組織として見られる面構造は、この ひずみ楕円の長軸方向、つまり θ' 方向に発達する.天然 では図示したような円や楕円は多くの場合観察できないた め、 ψ が測定できることは少ない.そこで、ひずみ解析を 行う場合には、観察できる面構造の角度 θ' から、せん断 ひずみ y を求めることが課題となる.

図 3(c) では、せん断帯形成以前に、せん断帯と角度 α で斜交して存在していた岩脈、鉱物脈、片理等が、変形後 に角度 α' に変化する様子が示されている.この場合でも、 図示したような楕円、平行四辺形、長方形は観察できない ことが普通で、 ψ が測定できることは少ない.まれに、変 形前にせん断帯と直交していた(図中 *DE* 方向の)岩脈等 が見られる場合には、 ψ が測定でき、【Eq. 1】を適用でき る.通常は、観察できる角度 α , α' から、せん断ひずみ



図3 単純せん断の模式図.(a)多数のせん断面に沿った一方向 へのずれによる円から楕円への変化.(b)円から楕円への面積 一定の変形で,図2(b)と図2(d)のψとθ'を重ねて表示したもの. 面構造はせん断面と角度θ'を持つひずみ楕円の長軸と平行に発 達する.(c)単純せん断帯によりずらされる岩脈,鉱物脈,多 数発達する片理の1層などが変形前のαから変形後のα'へ方向 が変化する模式図.

yを求めることが課題となる.

単純せん断帯は、図 3(c) のように、幅全体にわたって 一つのひずみ楕円で示すことができるような均質なひずみ が見られるものだけでなく、図4に示すような不均質なひ ずみ分布を示すものもある. この例では、case A と case B の境界部に示した正方形から平行四辺形への変化に示す ように、layer1 から layer 5 までせん断ひずみが大きくな っていく. このような不均質ひずみの場合、部分ごとに (layer ごとに)均質ひずみを求めていく. 図4の左表は、 ψとαの値は既定値、 γ , θ' , α' は計算結果を四捨五入 した近似値である.

天然では、測定できる θ '、 α 、 α 'から、せん断ひずみ γ と、ひずみ量の指標となるひずみ楕円の軸比Rを求める. 次章ではこれら諸量を関係づける各種のひずみ関係式、ひ ずみの基礎方程式(狩野・村田、1998)、ひずみ方程式(天 野・狩野、2009)を説明し、5章ではモールのひずみ円と 極について説明する. その後、6章で case A と case B の layer 4 を使って、 γ とRの作図による概要把握例を見る.

4. ひずみの各種関係式

[Eq. 2]
$$\gamma = \cot \alpha' - \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha'} - \frac{1}{\tan \alpha}$$

図 3(c) で示されるようなせん断ひずみ(y) と変形前後の岩脈等の方向(α , α)の関係式である. 変形前の岩脈等の方向が α ,変形後の方向が α 'としてわかっている場合,幾何学的説明は容易である. 図 5 は図 3(c)のA ~ E, Oと相似に描かれた【Eq. 2】の幾何学的理解のための作図である. 点 M は BC の中点である. 方眼の意味は後述する. BD が変形前の岩脈等の方向, CD が変形後の方向である. この図から,変位量 BC は

$$\overline{BC} = \overline{EC} - \overline{EB} \quad (7)$$

であり、せん断ひずみ(γ)は変位量/幅なので
 $\overline{EC} - \overline{EB}$

$$\gamma = \frac{EC - EB}{\overline{DE}} \quad (8)$$



図4 単純せん断の模式図. 図の上から下へ、せん断ひずみが大きくなるような不均質なひずみ分布の模式図である. case A はもとも と面構造を持たない岩石中の単純せん断帯で楕円長軸方向(θ)に発達するマイロナイト帯の面構造の模式図, case B は既存の岩脈, 鉱物脈、片理の変形前の方向(α)が変化する(α)模式図. case A と case B の境界には、正方形から平行四辺形への変化、円から 楕円への変化、case B の既存の岩脈等の方向変化が描かれている. 左の表は、便宜的な layer (0 ~ 5) ごとに、作図の際にあらかじめ 決めた ψ (°)、 α (°)の値と、計算された γ 、 θ (°)、 α (°)の四捨五入値.



図5 【Eq. 2】の幾何学的説明のための作図. 説明は本文参照.

 $\frac{\overline{EC}}{\overline{DE}} = \frac{1}{\tan \alpha'} \quad (9)$ $\frac{\overline{EB}}{\overline{DE}} = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (10)$

式 (9), (10) を式 (8) に代入し, 【Eq. 2】を得る.

図5の三角形 BMO は三辺の長さの比が 3:4:5 の直角三 角形となる. $\overline{BO} = \overline{CO}$ であり、B と C は O を中心とする 半径5 目盛の円に載る. この直角三角形と円は次に円と楕 円の関係を見ることも含め、野帳等の方眼を用いた図解や 値の確認に大変便利であり、そのために方眼を背景に示す とともに図5の $\overline{AB:BC} = 4:6$ となるように書いてある.

(Eq. 3)
$$\gamma = \frac{2}{\tan 2\theta'}$$

図 3(b) で示されるようなせん断ひずみ(γ)と面構造(ひ ずみ楕円長軸)の方向(θ)との関係式である.図6に 示すA,B,C,F,G,Oは、図3(b)と相似である.**BO** を半径としOを中心とする半円FBCGを書く.この変形 前の半円上の点Bは、せん断ひずみ γ によりひずみ楕円(上 半分)FCL'G上の点Cに移る.このときの変形前の \angle BFGを θ ,変形後の \angle CFGを θ 'とする.直角三角形 CFGは直角三角形BGFと相似であるから \angle BFG = \angle CGF = θ , また、直角三角形CFGの内角の和から $\theta + \theta'$ = 90°である.CF \ge CG は楕円に内接する長方形の長辺 および短辺で、楕円の長軸および短軸と平行であり、長軸 方向は \angle L'OG = θ 'である.単純せん断により延性せん 断帯中に形成される面構造はひずみ楕円の長軸方向に発達 していくため(Ramsay, 1980), θ 'は面構造の方向である.



ここで、方眼4目盛の長さを1とすれば、【Eq.1】より $y = \overline{BC}$ (= 1.5) となり、図解より $\overline{BM} = \overline{MC} = y/2$ で ある. $\angle COG = \angle OCM$ の大きさがわかれば、タンジェン トを用いてyが得られる. 弧 CG に対する円周角と中心角 の関係より $\angle COG = 2\theta'$ であるから、

$$\tan 2\theta' = \frac{1}{\gamma/2} \quad (11)$$

より【Eq. 3】を得る. なお,図6はTreagus (1981) が紹 介した作図法に若干加筆したものである.

ひずみ楕円の長軸方向(θ)とその方向の stretch(最 大 stretch, X)の関係式である.図7は、図6のひずみ楕 円の最大主半径と最小主半径を各辺とする長方形 OJ'K'L' とこれが変形する前の正方形 OJKLを実線で、最大 stretch(X)の計算に際して重要となる相似三角形 FBC とOLL'を太実線で描いてある.また、図7に示すO,F, G,J,J',L,L'の位置関係は図2(d)と相似である.図7 の変形前のOL方向とOJ方向は直交し、変形前の主方向 である.変形後のOL'方向とOJ'方向は直交し、変形後の 主方向すなわち楕円の主軸方向である.



図7 【Eq.4】の幾何学的説明のための作図.説明は本文参照.

ひずみ楕円の X は変形前の長さ \overline{OL} に対する変形後の楕 円の最大主半径 $\overline{OL'}$ の比であり, $\overline{FB} = \overline{GC}$ に注意して,

$$X = \frac{\overline{OL'}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{GC}} \quad (12)$$

より【Eq. 4】を得る. なお,最小 stretch (Z) については, 三角形 *FBC* と相似である三角形 *OJ'J* に注目すれば,

$$Z = \frac{OJ'}{OJ} = \frac{FB}{FC} = \frac{GC}{FC} = \tan \theta' = \frac{1}{X} \quad (13)$$

である.

図7の正方形と長方形は変形前後の主方向がそれぞれ直 交することを強調するために描かれており、必ずしもせん 断帯中における元正方形 *OJKL* の鉱物や岩石が変形して長 方形 *OJ'K'L*'になった場合に適用するひずみ関連式として 【Eq.4】を示したわけではない. ただし、図 2(c) に示した ように、最終的なひずみ楕円での主方向の直交関係と元の 円での主方向の直交関係とが成立しているため、最終的な θ' (または X) に依存して $\theta + \theta' = 90^{\circ}$ の関係により図7 の変形前の主方向である正方形 *OJKL* の方向($\angle LOG = \theta$) が変化することに注意しておく必要がある.

$$\left[\text{Eq. 5} \right] \qquad \qquad \gamma = X - Z = X - \frac{1}{X}$$

せん断ひずみ (γ) とひずみ楕円の主 stretch (最大 stretch; X, 最小 stretch; Z)の関係式である. 図8では, 点 C から OG に下した垂線の足 S を加筆してあり $\overline{CS} = 1$

ここで



図8 【Eq.5】の幾何学的説明のための作図. 説明は本文参照.

である. 最大 stretch (*X*) と最小 stretch (*Z*) はそれぞれ, 式 (12)・(13) より,

$$X = \frac{\overline{FC}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{CS}} = \overline{FS} \quad (14)$$
$$Z = \frac{\overline{GC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{GS}}{\overline{CS}} = \overline{GS} = \overline{FA} \quad (15)$$

せん断ひずみ (γ) は, $\overline{AB} = 1$ なので,
 $\gamma = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \overline{BC} = \overline{AS} = \overline{FS} - \overline{FA} \quad (16)$

より, 【Eq.5】を得る.

[Eq.6]

$$X = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} + \gamma}{2}$$
$$Z = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma}{2}$$

せん断ひずみ (γ) とひずみ楕円の主 stretch (最大 stretch; X,最小 stretch; Z)の関係式である.図9は, Oを中心とした半径 BOの円に点 Nを加筆してあり, \overline{CN} = 2 である.円の直径 \overline{BN} は \overline{BC} (= γ) と \overline{CN} (= 2)か らピタゴラスの定理を用いて求めることができ, \overline{BO} = $\overline{BN}/2$ であるから,



図9 【Eq.6】の幾何学的説明のための作図. 説明は本文参照.

さらに、 $\overline{FO} = \overline{BO}$, $X = \overline{BO} + \gamma/2$, $Z = \overline{BO} - \gamma/2$ であ ることより 【Eq. 6】を得る. なお、 【Eq. 6】は Harker (1885, p. 819) に見られる.

$$\begin{array}{l} \text{[Eq. 7]} \\ \tan \theta' = \frac{\tan \theta}{R} \end{array}$$

変形前の状態で着目した線が変形前の主方向となす角 (θ)と、その線が変形後の主方向(ひずみ楕円長軸方向) となす角(θ)と、ひずみ楕円の軸比(R)の関係式である. ここで着目するのは、図6における BO から CO への変化 であり、図7 で確認できるように、線 BO の変形前の主方 向 OL となす角 BOL は θ である(角 BOL は平行線 OL と FB に対する線 BO が作る錯角で角 OBF と等しく(\angle BOL = \angle OBF)、角 OBF は二等辺三角形 OBF の底角であり角 OFB と等しい(\angle OBF = \angle OFB)).また、図6から線 COが変形後の主方向OL'となす角 COL'は θ 'である.次に、 図10において、 $\overline{CS} = 1 = \overline{SN}$ であり、 $\tan \theta' = \overline{SG} = Z$ 、 $\tan \theta = \overline{FS} = X$.ここで、三角形 FUN ∞ 三角形 CFG とな るような点 U を \angle FUN = θ' としてとれば、

$$\overline{SN}: \overline{US} = 1: \overline{US} = \overline{SG}: \overline{FS} = Z: X \quad (18)$$
$$\overline{US} = \frac{X}{Z} = R = \frac{\tan\theta}{\tan\theta'} \quad (19)$$

より【Eq.7】を得る.

また, XZ = 1 より,

$$R = X^2 = \frac{1}{Z^2}$$
 (20)

さらに, \overline{TS} は,三角形TGSにおいて $\angle TGS = \theta$ 'であることから,

$$\overline{TS} = \overline{SG} \tan \theta' = Z^2 = \frac{1}{R} \quad (21)$$



図 10 【Eq. 7】【Eq. 10】 【Eq. 11】 の幾何学的説明のための作図. 説明は本文参照.

である. なお, 【Eq. 7】は Harker (1885, p. 822) に示され ており, Ramsay and Huber (1983) では Wettstein (1886) の式として紹介され, 工学分野でも引用例 (例えば, Boulanger and Hayes, 2002) がみられる.

[Eq. 8]

$$R = \frac{(\gamma^2 + 2) + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}}{2} = \frac{2}{(\gamma^2 + 2) - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}}$$

ひずみ楕円の軸比 (*R*) とせん断ひずみ (γ)の関係式である. 式 (20) に【Eq. 6】を代入することで得られる. Treagus (1981) が指摘するように最も単純に *X* の二乗を示せば,

$$R = X^{2} = \frac{\gamma^{2} + 4 + 2\gamma\sqrt{\gamma^{2} + 4} + \gamma^{2}}{4} \quad (22)$$

であり,約分すれば【Eq.8】となる.

[Eq. 9]

$$R^{2} = \frac{(\gamma^{2} + 2) + \gamma \sqrt{\gamma^{2} + 4}}{(\gamma^{2} + 2) - \gamma \sqrt{\gamma^{2} + 4}}$$

ひずみ楕円の軸比(R)とせん断ひずみ(y)の関係式 である.【Eq.8】の右側の等式の両辺(二つの分数)を掛 け合わせることで得られる.

[Eq. 10]

$$\gamma^2 + 2 = R + \frac{1}{R}$$

せん断ひずみ(γ)とひずみ楕円の軸比(R)の関係式 である.図10において、三角形 *BUT* は直径 \overline{UT} の円に内 接する直角三角形であり、左上の挿入図に示すa, b, \sqrt{ab} の関係を用いると、

$$\overline{BC}^{2} = \overline{UC} \ \overline{CT} = \gamma^{2} = (R-1)\left(1-\frac{1}{R}\right)$$
$$= R-1-1+\frac{1}{R}$$
(23)

より【Eq. 10】を得る. せん断ひずみが大きいとき,

$$R \approx \gamma^2 + 2, \quad R \approx \gamma^2 \quad (24)$$

という近似式が用いられる (Burg and Laurent, 1978; Fagereng, 2013 など). $y^2 - R$ は, [Eq. 10] および [Eq. 8] より,

$$\gamma^2 - R = \frac{1}{R} - 2 = \frac{2}{\gamma^2 + 2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}} - 2$$
 (25)

と示され、 γ が大きいときの $\gamma^2 - R$ の極限は、

 $\lim_{\gamma \to \infty} (\gamma^2 - R)$

$$= \lim_{\gamma \to \infty} \left(\frac{2}{\gamma^2 + 2 + \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} - 2 \right) = -2 \qquad (26)$$

したがって, γが大きいとき γ² - *R* ≈ -2 であり,式 (24) となる.

図 11 に, θ' , X, y, R, γ^2 の関係を示した. 各グラフから, X と y, R と γ^2 は $\theta' < 10^\circ$ の場合にほぼ一致することが読みとれる.



図 11 (a) ひずみ楕円の長軸方向が単純せん断帯となす角(θ) に対する最大 stretch (X) とせん断ひずみ(γ)の変化. (b) ひずみ楕円の長軸方向が単純せん断帯となす角(θ)に対する ひずみ楕円の軸比(R)とせん断ひずみの二乗(γ ²)の変化.

[Eq. 11]
$$\gamma = \left(R - \frac{1}{R}\right)\cos\theta\sin\theta$$

せん断ひずみ(γ), ひずみ楕円の軸比(R), 変形前後 で長さ変化がない方向の変形前の方向(図7の OG 方向と OB 方向)と変形前の主方向(図7の OL 方向)がなす角 度(θ)の関係式である.図10の三角形 BUT について, $\overline{UT} = R - (1/R) \ge \angle BTU = \theta$ より【Eq. 11】を得る.

[Eq. 12]

$$R^{2} = \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{2}} = \frac{\tan(\psi + \phi')}{\tan \phi'} = \frac{1}{\tan \phi' \tan(90^{\circ} - \psi - \phi')}$$

変形後のひずみ楕円長軸方向と着目する線がなす角 (ϕ),この着目する線の角せん断(ψ),ひずみ楕円の軸 比(R)の関係式である.3.で述べたように、多くの場合 に角せん断は測定できないが、変形前の状態で線対称な形 態を持つ化石等が含まれる場合はこの式、またはこの式に よる3変数の関係を示す曲線群を使ってひずみ解析ができ る.図12は図7の正方形 *OJKL*から長方形 *OJ'K'L*'へ単 純せん断により変形する図に、変形前の主方向(*OL*方向 と*LK*方向)に対して任意の角度 ϕ を持つ線が、*OH*'と *HT*'に変形した様子と変形後の角 ϕ ', ϕ '' = ϕ ' + ψ などを



図 12 【Eq. 12】 【Eq. 13】 の幾何学的説明のための作図. 説明 は本文参照.

加筆したものである. ここで *OH*' 方向についての角せん 断 ψ は図のように反時計回りである. 図 12 で,変形後の *OL*' は変形前の *OL*の X 倍,変形後の *L'H*' は変形前の *LH* の Z 倍,変形後の *H'K*' は変形前の *HK* の Z 倍,変形後の *KT* は変形前の *K* の X 倍である. したがって,

$$\tan \phi' = \frac{\overline{L'H'}}{\overline{OL'}} = \frac{Z}{\overline{X}} \frac{\overline{LH}}{\overline{OL}} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \tan \phi = \frac{\tan \phi}{R}$$
(27)
$$\tan \phi'' = \frac{\overline{K'I'}}{\overline{H'K'}} = \frac{X}{\overline{Z}} \frac{\overline{KI}}{\overline{HK}} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \tan \phi = R \tan \phi$$
(28)

式 (27) は、【Eq. 7】と同じである. すなわち 【Eq. 7】 は任意の角 ϕ について成り立つ. 式 (27) と式 (28) から, 変形前の角度 ϕ (tan ϕ)を消去することで,変形後の角 度 ϕ 'と ϕ "でRを表せば

$$\tan \phi = R \tan \phi' = \frac{\tan \phi''}{R} \quad (29)$$
$$R^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\tan \phi''}{\tan \phi'} \quad (30)$$

である.式(30)の $\phi'' に \psi + \phi'$ を代入すること,および, 一般に tan *a* tan (90° - *a*) = 1 であることから右辺の分 母と分子に tan (90° - $\psi - \phi'$)をかけると【Eq. 12】が 得られる.

【Eq. 12】から,異なる*R*に対する $\psi \geq \phi'$ の関係を示す 曲線群が得られ,Breddin グラフ(図13)と呼ばれており, 測定角度は時計回りを正にとる(例えば,中島ほか, 2004;狩野・村田,1998).図13に,図12の $\psi \geq \phi'$ に よる「◆」を例示した.図12では、 $\phi' \geq 0$ してひずみ楕円 長軸方向(*OL*/方向)に対する*OH*の方向を測定し、角せ ん断 $\psi \geq 0$ て*OH*の法線方向(*H*'i'方向)から、変形前の *OH*'(つまり*OH*)と直交していた線*HI*の変形後の方向(*H*'I' 方向)を測定する。角度は時計回りを正とするので、図 12の場合は $\phi' = 0$ も のである。

図 13 には、 ϕ' も ψ も正となる場合として、図6の θ' と ψ による「●」も例示した.ここで、 θ 'と ϕ 'の関係に ついて説明する。単純せん断における角度θ'は、せん断 面に対するひずみ楕円長軸方向の角度として扱ってきた (【Eq. 3】, 【Eq. 4】 など). ひずみ楕円長軸方向(OL'方向) を基準とした場合には,角度θ'は線 OC 方向(反時計回り) と線 OG 方向(時計回り)の角度であり、この2方向は変 形の前後で長さが変わらないという特別な線の変形後の方 向である. つまり, θ'は, 図 13 (【Eq. 12】) において任 意の値をとり得るφ'の特別な場合の角度である. したが って、図6の線OGに着目したときには、図13(【Eq. 12)) の ϕ' として、OL'方向に対する時計回りの角 θ' を 用いる.角せん断 ψ としては、OGの法線方向(AB方向) から、変形前に OG と直交していた線 AB の変形後の方向 (AC 方向)を測定する。図6の場合はθ'(図13でのφ) も↓も時計回りであり正である.

図 13 の曲線群は表計算ソフトにより各軸比(R)ごと に横軸 1 度刻みで縦軸の値を得て,描画ソフトでグラフ化 することができる.化石等を利用した実際のひずみ解析手 順の説明は,中島ほか(2004)などを参照されたい.なお、 図 13 のグラフが,中島ほか (2004)の図 B-8-7 (p. 138) と縦軸について線対称となっているのは,中島ほかの ϕ_A の測り方 (p. 137,図 B-8-6(c);本報告の ϕ' に相当する基準線から着目線のなす角度)が反時計回りを正としているためである.

[Eq. 13]
$$\gamma = \frac{(R^2 - 1)\tan\phi'}{1 + R^2\tan^2\phi'}$$

せん断ひずみ(γ), ひずみ楕円の軸比(R), 変形後の ひずみ楕円長軸方向と着目する線がなす角度(ϕ)の関 係式である. [Eq. 12] を,タンジェントの加法定理(tan (a+ b) = (tan a + tan b) / (1 - tan a tan b)) と, [Eq. 1] γ = tan ψ を用いて展開すると,

$$R^{2} = \frac{\tan(\psi + \phi')}{\tan \phi'} = \frac{\tan \psi + \tan \phi'}{\tan \phi' (1 - \tan \psi \tan \phi')}$$
(31)

$$R^{2} \tan \phi' - R^{2} \tan \psi \tan^{2} \phi' = \tan \psi + \tan \phi'$$
(32)
(R² - 1) \tan \phi' = \tan \psi (1 + R² \tan² \phi') (33)

$$\frac{(R^2 - 1)\tan\phi'}{1 + R^2\tan^2\phi'} = \tan\psi = \gamma \qquad (34)$$

であり, 【Eq. 13】となる. 【Eq. 13】の ϕ' は任意の角に ついて成り立つ.

【Eq. 13】の任意の角 ϕ' を図 $6 \circ \theta'$, すなわち, 変形前後で長さが変化しない線 OG または線 OC がひずみ楕円の長軸方向 OL'となす角とした場合,図 10 の三角形 USF と三角形 FSC に着目すると,

$$\frac{(R^2 - 1)\tan\theta'}{1 + R R \tan^2\theta'} = \frac{(R + 1)(R - 1)\tan\theta'}{1 + R}$$
$$= (R - 1)\tan\theta' = \gamma$$
(36)

が成り立つ.





以下, 【Eq. 14】, 【Eq. 16】がひずみの基礎方程式(狩野・ 村田, 1998), 【Eq. 15】, 【Eq. 17】がひずみ方程式(天野・ 狩野, 2009) と呼ばれるもので,次章のモール円の解説で 用いられる.

[Eq. 14] $\lambda' = \lambda'_1 \cos^2 \phi' + \lambda'_2 \sin^2 \phi'$

ここで、 $\lambda'_1 = 1/\lambda_1$ であり、最大 stretch ($\sqrt{\lambda_1}$) の相 反二次値と呼ぶことにする. 同様に、 $\lambda'_2 = 1/\lambda_2$ を最小 stretch ($\sqrt{\lambda_2}$)の相反二次値と呼ぶことにする. 両者をひ ずみ楕円の主 stretch の相反二次値、 $\lambda' = 1/\lambda$ は任意方向 の stretch の相反二次値と呼ぶことにする. これらはしば しば「相反二次の伸び」と呼ばれている.



図 14 【Eq. 14】 【Eq. 16】の幾何学的説明のための作図. 説明 は本文参照.

【Eq. 14】は,任意方向の stretch の相反二次値 (λ') と, ひずみ楕円の主 stretch の相反二次値 (λ'_1 , λ'_2) と,任 意方向の線がひずみ楕円の長軸となす角 (ϕ')の関係式 である.図14において,変形前(図14(a))の半径1の 円周上の点 *P*(*x*,*y*)は,変形後(図14(b))に最大 stretch が $\sqrt{\lambda_1}$,最小 stretch が $\sqrt{\lambda_2}$ のひずみ楕円上の点 *P*₁(*x*₁,*y*₁) に移り, *x*軸と *OP*₁ とのなす角は ϕ' となる.【Eq. 14】の 導出に際して着目するのは *OP*(長さ1)から *OP*₁(長さ $\sqrt{\lambda}$)への長さ変化である.ここで, $\sqrt{\lambda}$ を求めるために, *x*₁, *y*₁ を λ , θ' により表し,楕円の式に代入する.*P*₁(*x*₁,*y*₁) を通る図14(b)の楕円を表す式は,

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_1^2}{\lambda_2} = 1 \quad (37)$$
これに $x_1 = \sqrt{\lambda}\cos\phi', \ y_1 = \sqrt{\lambda}\sin\phi'$ を代入し

$$\frac{\lambda\cos^2\phi'}{\lambda_1} + \frac{\lambda\sin^2\phi'}{\lambda_2} = 1 \quad (38)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} \cos^2 \phi' + \frac{1}{\lambda_2} \sin^2 \phi' \quad (39)$$

より【Eq.14】を得る.

[Eq. 15] $\lambda' = \frac{\lambda'_2 + \lambda'_1}{2} - \frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2} \cos 2\phi'$

この式は,【Eq. 14】を, コサインの2倍角の公式 ($\cos^2 \phi' = (1 + \cos 2 \phi')/2$, $\sin^2 \phi' = (1 - \cos 2 \phi')/2$)を用いて書き換えて得られる.

[Eq. 16]
$$\frac{\gamma}{\lambda} = (\lambda'_2 - \lambda'_1) \sin \phi' \cos \phi'$$

任意の方向の線の stretch ($\sqrt{\lambda}$)の二乗に対するせん断 ひずみ(γ)の比と、ひずみ楕円の主 stretchの相反二次 値(λ'_1 , λ'_2)、変形後の任意方向の線がひずみ楕円長軸 となす角(ϕ)の関係式である. せん断ひずみを求める ために角せん断を用いるが、ここで後のモール円の解釈や 作図において都合が良いように、 ψ_d (*d* t directionの意味) という便宜的な角度を導入しておく.簡単に結論を記せば、 ψ_d は角せん断 ψ と絶対値は等しく、基準から測角する回 転方向は逆向きである.

図 14 において,変形前(図 14(a))の点 P における円 の接線 QyQx は、変形後(図 14(b))の楕円上の点 P1 にお ける接線 Qy_1Qx_1 となる. 着目線 OP_1 の角せん断(ψ) は, P₁における接線の角度変化ψで,図 14(b) では反時計回 りである. ここで, 原点 O から楕円の接線 Qy1Qx1 に下ろ した垂線の足をQとし、OQの長さをpとする.また、図 14(a) の正方形 OPqP'は、対辺の平行性を保ったまま変形 し,図14(b)の平行四辺形 OP₁q₁P'₁となるため,OQ は OP'_1 の法線でもある. このとき, 角 P_1OQ について, OQ方向を基準として、OP1方向へ測った角度をψ」とする. ψ_d は、変形前に着目線 (OP_1) と直交していた線 (OP') の変形後の線(OP'1)の法線(OQ)方向から測った着目 線(OP1)の方向への角度であり,図14(b)では時計回り である. 図14(b)において, 三角形 Qy1OQ は三角形 Qy_1Qx_1O と相似で、 $\angle Qy_1OQ = \angle Qy_1Qx_1O = \eta$ であるため、 $\psi = 90 - \phi' - \eta = \psi_a$ より、 $\psi \ge \psi_a$ の絶対値は等しい $(|\psi| = |\psi_d|)$. あるいは, 直角三角形 $P_1 OQ$ は OP_1 を直 径とする円(図示しない)に内接しており,接弦定理から $|\psi| = |\psi_d|$ である. 着目線 *OP*₁ の ψ_d は, また, 図 14(a) の正方形 OPqP' から図 14(b) の平行四辺形 OP1q1P'1 へ変 化する際の原点のにおける直角からの角度変化というこ ともできる.

さて,【Eq. 16】の導出の方針は, $\tan^2 a = (1/\cos^2 a)$ - 1という一般的な関係,【Eq. 1】および図 14(b) におい て $\cos \psi_d = p/\sqrt{\lambda}$ であることを組み合わせ, $\gamma^2 = \tan^2 \psi_d$ = $(1/\cos^2 \psi_d) - 1 = (\lambda/p^2) - 1$ であることを用いる. pを得るため, 点 $P_1(x_1, y_1)$ を通る楕円の接線を考えれば, その式は,

$$\frac{xx_1}{\lambda_1} + \frac{yy_1}{\lambda_2} = 1 \quad (40)$$

で、【Eq. 14】と同様に $x_1 = \sqrt{\lambda} \cos \phi'$, $y_1 = \sqrt{\lambda} \sin \phi'$ を式 (40) に代入し、さらに両辺に $\lambda_1 \lambda_2$ をかけると、

$$\lambda_2 \sqrt{\lambda} \cos \phi' \ x + \lambda_1 \sqrt{\lambda} \sin \phi' \ y = \lambda_1 \lambda_2 \quad (41)$$

ここで、直線 ax + by + c = 0 と原点との距離 d を求め る公式, $d = |c|/\sqrt{a^2 + b^2}$ より,

$$p = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 \lambda \cos^2 \phi' + \lambda_1^2 \lambda \sin^2 \phi'}}$$
(42)
$$\gamma^2 = \frac{\lambda}{p^2} - 1 = \frac{\lambda_2^2 \lambda \cos^2 \phi' + \lambda_1^2 \lambda \sin^2 \phi'}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \lambda - 1$$
$$= \lambda^2 \left(\frac{\cos^2 \phi'}{\lambda_1^2} + \frac{\sin^2 \phi'}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$
(43)

右辺のλ²を左辺に移項し,式(39)を右辺の1/λに代入し, $1 - \cos^2 \phi' = \sin^2 \phi'$ に注意して,

$$\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 = \frac{\cos^2 \phi'}{\lambda_1^2} + \frac{\sin^2 \phi'}{\lambda_2^2} - \left(\frac{\cos^2 \phi'}{\lambda_1} + \frac{\sin^2 \phi'}{\lambda_2}\right)^2$$
$$= \frac{\cos^2 \phi' \left(1 - \cos^2 \phi'\right)}{\lambda_1^2} + \frac{\sin^2 \phi' \left(1 - \sin^2 \phi'\right)}{\lambda_2^2}$$
$$-2\frac{\cos^2 \phi' \sin^2 \phi'}{\lambda_1 \lambda_2}$$
$$\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^2} \sin^2 \phi' \cos^2 \phi'$$
$$= \left\{ \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \sin \phi' \cos \phi' \right\}^2$$
(44)

より【Eq. 16】を得る $(\lambda_1/(\lambda_1 \lambda_2) = 1/\lambda_2 = \lambda'_2, \lambda_2/$ $(\lambda_1 \lambda_2) = 1/\lambda_1 = \lambda'_1).$ なお,式 (42) ではなく,式 (41) から接線の x 切片 Q_{x1} , y 切片 Q_{y1} をそれぞれ,

$$Q_{x1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 \sqrt{\lambda} \cos \phi'} \qquad Q_{y1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \sqrt{\lambda} \sin \phi'} \tag{45}$$

と求め,図14(c)に示すピタゴラスの定理の応用により,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{Q_{x1}^2} + \frac{1}{Q_{y1}^2} \qquad (46)$$

として式(43)に代入する方法もある.

[Eq. 17]

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2} \sin 2\phi'$$

この式は、【Eq. 16】を、サインの2倍角の公式 (sin ϕ ' $\cos \phi' = (\sin 2\phi')/2$)を用いて書き換えて得られる.

5. モールのひずみ円と極

応力やひずみの解析に用いられるモール円は多くの教科 書的文献に取り上げられているが,説明方法は多様で,自 学の際に理解や実際の変形構造との対応づけなどが難しい 場合がある.筆者の経験では、角せん断の測角方向(角度 測定時の回転方向)と clockwise-up convention (Treagus, 1987; Ragan, 2009) といわれるモール円の座標の慣習の 理解に長期を要した. そこで、本報告では特にモール円上 の点の方向を指し示す角度として図14で導入したψ。を 用い、教科書的文献でわかりにくいと思われる点を筆者な りに補った、ここでは、ひずみ方程式からモール円の式を 導出し、図10を用いた作図(図15)の後、図16、図17 を用いて, clockwise-up convention と, この慣習に従っ たときに正しく表示できる「極」といわれるモール円上の 点,および変形構造との対応づけを説明する.

5.1. モールのひずみ円

ひずみ方程式 【Eq. 15】 【Eq. 17】 を組み合わせること で円を表す式となることを見るため、両式からφ'を消去 する. 具体的には、【Eq. 15】を式変形し、

$$\lambda' - \frac{\lambda'_{2} + \lambda'_{1}}{2} = -\frac{\lambda'_{2} - \lambda'_{1}}{2} \cos 2\phi' \quad (47)$$

この両辺を二乗し、【Eq. 17】の二乗と辺同士の和をとり、

$$\left(\lambda' - \frac{\lambda'_2 + \lambda'_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\cos 2\phi'\right)^2 + \left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\sin 2\phi'\right)^2 \quad (48)$$

 $\mathcal{Z}\mathcal{T}\cos^{2}\varphi' + \sin^{2}\varphi' = 1 \ \mathfrak{L} \ \mathfrak{I},$

 $\left(\lambda' - \frac{\lambda'_2 + \lambda'_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\right)^2$ (49)

となる. 式 (49) は, 横軸に λ ', 縦軸に γ/λ をとると, 中心の座標が (($\lambda'_2 + \lambda'_1$)/2, 0), 半径が ($\lambda'_2 - \lambda'_1$)/2 の円を表す式である.この円がモールのひずみ円である. この円周上にある点は、ひずみ楕円中の線の方向の λ' と y/λを表している. つまり, モールのひずみ円は, ひず み方程式 【Eq. 15】 【Eq. 17】 の図的表現である.

この円と横軸の交点の座標は,

$$\frac{\lambda'_{2} + \lambda'_{1}}{2} - \frac{\lambda'_{2} - \lambda'_{1}}{2} = \lambda'_{1} \qquad (50)$$
$$\frac{\lambda'_{2} + \lambda'_{1}}{2} + \frac{\lambda'_{2} - \lambda'_{1}}{2} = \lambda'_{2} \qquad (51)$$

であり,原点に近い方が $(\lambda'_1, 0)$,遠い方が $(\lambda'_2, 0)$ で ある.

続いて、図10が、モールのひずみ円の作図に便利であ ることを示す. 式(4), 式(19), 式(20), 式(21)から, 図 10 の, \overline{TS} , \overline{US} は,

$$\overline{TS} = \frac{1}{R} = \frac{1}{X^2} = \frac{1}{\lambda_1} = \lambda'_1 \quad (52)$$
$$\overline{US} = R = \frac{1}{Z^2} = \frac{1}{\lambda_2} = \lambda'_2 \quad (53)$$

したがって、円と軸の交点の座標となり(式(50),(51))、 図 15 に示すような直径 TU の円が描ける. モールのひず み円を作図していくときには、さらに次の工夫をする. す なわち,図10を時計回りに90°回転させ、点Aを横軸と 縦軸の交点とし、 $\overline{TS} = \overline{VA}$ に注意して線AVの延長上に \overline{TU} = VU'となる点 U'をとり, VU'を直径とする円を図 15 の



図 15 モールのひずみ円の作図に図 10 が有用であることを示 す直径 *TU* の円.

O' を中心として描く. このようにして作図したモールのひずみ円を図 16(a) に示す. なお,図 15 において直径 TUの円と線 VU'の交点を C'とすれば、台形 FBCG と台形 $TBC'U は相似であることから <math>\overline{BA:BC} = \overline{BC:BC'}$ であり, $\overline{BA} = 1, \overline{BC} = \gamma \, \alpha \, o$ で、 $\overline{BC'} = \gamma^2, \overline{BO'} = \gamma^2/2 \, \epsilon \, a$ る. $\overline{BC'} = \gamma^2$ から、式(24)の近似式、図 11(b)の値の近接 傾向($\gamma^2 \, \epsilon \, R$ が大きいとき)が定性的に理解できる.また、 台形 FBCG と台形 TBC'U の相似から、 $\angle BO'C = \angle BMA$ $= \angle AOB = 2\theta'$ であり、モール円の中心からモール円の 円周上の 2 点を見たときの角度(2\theta')は、この 2 点に対 応する 2 直線が実際の変形構造(実空間)においてなす角 度(図 6 の $\angle COL' = \theta'$)の 2 倍となることが幾何学的に 理解できる.

図 16(a) は、これまで説明してきた単純せん断ひずみy= 1.5 (方眼 6 目盛/4 目盛)、ひずみ楕円の軸比R = 4の モールのひずみ円 (以下、モール円と略記する)である. モール円が描かれる空間をモール空間という. 横軸より上 側の半円は、ひずみ楕円中のある着目線の角せん断 ψ が時 計回り (clockwise)で、かつ着目線はひずみ楕円長軸に 対し時計回り方向 (clockwise)にあることを示す (clockwise-up convention). 横軸より下側の半円は、ひず み楕円中のある着目線の ψ が反時計回り (anticlockwise)で、 かつ着目線はひずみ楕円長軸に対し反時計回り方向 (anticlockwise)にあることを示す. 実空間の図 16 (b, c) とモール空間の図 16(a) とを比較しながら解説する. 図 15 と異なり、図 16 は実空間の線 OG の方向を、モール空 間の横軸 (λ '軸) と揃えてある.

5.2. 角せん断とモール円の解釈

モール空間の clockwise-up convention の解説 (Treagus, 1987) によれば, 1961 年から 1986 年までのモールのひず み円を扱った文献中には, 測角方向や角度の正負の慣習に 不一致が散見される. したがって, この年代の研究やそれ らを元にした教科書的文献を読み進める際には注意が必要 である. そこで, clockwise-up convention を踏まえた考



図 16 (a) モールのひずみ円 (b, c) 角せん断 (ψ) と便宜 的に導入した ψ_{a} および着目線の角度 (θ', θ'')の測定方向の例. 説明は本文参照.

え方を整理するため、ψ_dを導入する. 図 16(a) のモール 円上の点Cは、変形前後で長さ変化が生じなかった(λ) = 1) 実空間(図 16(b)) における線 OC 方向の $y / \lambda = y$ /1 = yという状態を示す.この点*C*は、モール空間の原 点Aから、せん断ひずみが0となるλ'軸方向を基準とし、 時計回りに測った角度 ψ_d の方向に位置する. 原点A から 時計回りの ψ が指し示す点で表される着目線の角せん断 <u>ψは、点がモール円の下半円に位置するため、反時計回り</u> である.本節の後半で具体例を説明するとおり,着目線の 角せん断ψは実空間において反時計回りであり, モール空 間と一致する.この関係が、 ψ_d を便宜的に導入した理由 である.ここで、 ψ_a は「変形前に着目線と直交していた 線の変形後の法線から、着目線の方向を測った角度(測角 方向の矢印は着目線に向く)」であり、実空間で測定した ψ_a の方向に、モール空間の原点から線を引くと、自動的 に clockwise-up convention に則したモール円が作図でき また、モール円の解釈の際には、着目線の角せん断ψ は「着目線の法線から,変形前に着目線と直交していた線 の変形後の方向を測った角度(測角方向の矢印は着目線の 法線から出る)」であることに注意して、 $|\psi| = |\psi_d|$ か

つ回転方向は逆向きと考えれば間違いにくい.

続いて、図 16(b, c) により、実空間の $\psi \ge \psi_d$ およびひ ずみ楕円の長軸に対する着目線の角度とモール円との対応 を確認する.

図 16 (b) は、図 6 に加筆したもので、着目線は太線の OC である。OB が OC に変化したときの ψ_a は、変形前に 着目線と直交していた線(Ww)の変形後(W'w')の法線 から,着目線 (OC) の方向を測った角度 (≈56.3°) で, 時計回りである。角せん断 ψ は,着目線 (OC) の法線から, 変形前に着目線と直交していた線(Ww)の変形後(W'w') の方向を測った角度(≈56.3°)で、反時計回りである. また,線 OC はひずみ楕円の長軸方向に対して反時計回り に角 θ'(≈ 26.6°)で斜交している. これらの値は, 図 16(a) のモール円上の点Cに対応し、点Cは、原点Aから ψ_a の 測角の回転方向の通りに時計回りに $\psi_{a} \approx 56.3^{\circ}$ の方向,モ ール円の中心 Ο' からひずみ楕円の長軸方向の値 λ'1 を示 す方向を基準として反時計回りに2θ'(≈53.1°)の方向 に位置する.反時計回りの角せん断ψより, yも反時計回 りである.こうして着目線 OC 方向の実際のひずみに関す ち anticlockwise の領域において点 Cにより表現される. anticlockwise の領域の点をモール空間の原点A から指し 示すのは、時計回りの角度ψ_dである.

自学の際に混乱する可能性があるのは、OC は OB から 変化したので、全体的な(例えば、せん断帯全体の)変形 の中で時計回りであることと、ひずみ楕円中の OC 方向に ついての角せん断(せん断ひずみ)が反時計回りであるこ との、それぞれは事実でありながら一見したときの回転方 向の不一致である. これについては, 角せん断ψが, ひず み楕円中において着目線直交方向から鋭角化した回転角度 (回転方向の情報を含む)であることを踏まえ、円の中の 正方形がひずみ楕円の中の平行四辺形に変化することを考 えると見通しが良くなると思われる. 例えば, 図16(b) に おいて, Ww 方向と OB 方向を辺とする正方形が, W'w'方 向と OC 方向を辺とする平行四辺形になるとき、平行四辺 形の2方向の辺がつくる鋭角に注目すると、片方の辺方向 (OC 方向)を着目線とすれば、角せん断は図 16(b)のψ のとおり反時計回りとなる. この同じ変形においてもう一 方の辺方向(W'w'方向)を着目線とすれば、角せん断は 角度の絶対値が等しく逆回転方向(時計回り方向)となる. 図 16(b) では、W'w' 方向についての角せん断は図中で ψ_d と示したものとなり、角せん断とせん断ひずみは時計回り となる.図16(b)のような、せん断帯全体として時計回り を示す右上がりのひずみ楕円が描かれる変形であっても, ひずみ楕円として考えた場合には、楕円中の着目線方向に 応じた反時計回りと時計回りの角せん断(せん断ひずみ) が存在する.

図 16(c) の着目線は太線の OM' である.変形前の線 OM はこれを含む円から楕円への変形で線 OM' になる.三角 形 ABC と三角形 OMM' は相似である.このときの ψ_d は, 変形前に着目線と直交していた線 (OG)の変形後 (OG) の法線 (OM) から,着目線 (OM')の方向を測った角度 (\approx 56.3°) で,時計回りである.角せん断ψは,着目線 (OM') の法線から、変形前に着目線と直交していた線(OG)の 変形後 (OG) の方向を測った角度 (≈ 56.3°) で, 反時計 回りである.線 OG が変形前後で長さも方向も変わらない ために, 混乱しないように注意する必要がある. また, 線 OM' はひずみ楕円の長軸方向に対して反時計回りに角 θ" (7°強)で斜交している. これらの値は図 16 (a) のモー ル円上の点 M'に対応し、点 M'は、原点 A から ψ_a の測角 の回転方向の通りに時計回りに $\psi_d \approx 56.3^\circ$ の方向,モール 円の中心 Ο' からひずみ楕円の長軸方向の値 λ'1 を示す方 向を基準として反時計回りに2 θ"(≈14.3°)の方向に位 置する. さらに,線 OM' は変形前の線 OM から引き延ば されており、λ'は0.3程度の値(モール空間の横軸4目 盛で $\lambda' = 1$)を持つ.反時計回りの角せん断ψより, γ も反時計回りである.こうして着目線 OM' 方向の実際の ひずみに関する ψ , γ , θ "はすべて, モール空間の横軸 の下側すなわち anticlockwise の領域において点 M' によ り表現される。anticlockwiseの領域の点をモール空間の 原点 A から指し示すのは、時計回りの角度 ψ_d である。

図 16(c) の点 A の部分に,図 2(b),図 6 などで示して きた角せん断ψを時計回りの矢印とともに示した. この角 せん断は, FG 方向(例えば,着目線 AO||OG,「||」は平 行を表す)についての ψ であり,着目線 (AO||OG)の法 線(AB||OM)から、変形前に着目線と直交していた線 (AB||OM) の変形後 (AC||OM') の方向を測った角度 (≈ 56.3°)で、時計回りである. このψは、上述の着目線 OM'についての ψ_d と等しく,着目線 OM'についての ψ と 逆向きで角度の絶対値は等しい. そのため, FG 方向の着 目線の ψ_d は反時計回りに $\psi_d \approx 56.3^\circ$ である.また、ひず み楕円長軸方向に対して時計回りに角 θ' (≈ 26.6°) で斜 交し,変形前後で長さが変わらない($\lambda' = 1$). したがって, FG 方向の着目線は、図 16(a) では原点 A から反時計回り に $\psi_d \approx 56.3^\circ$ 方向,モール円の中心から時計回りに2 θ' (≈ 53.1°)の方向, 横軸の座標 λ' = 1, 縦軸の座標は γ の, モール円上の点fgで表され、 ψ 、 γ 、 θ 'はすべて、モー ル空間の横軸の上側すなわち clockwise の領域に位置す る. clockwise の領域の点をモール空間の原点 A から指し 示すのは、反時計回りの角度 ψ_a である. これまで図 2, 図5,図6,図8,図9および図16(b, c)で右向き矢印で 示してきたyは、この点fg が示す線 FG 方向についての せん断ひずみである.

5.3. モール円の極

実空間とモール空間の対応づけをさらに進めるため,モール円の極 (pole of the Mohr circle)を説明する.図 16(a)において,モール空間上の点Cから,実空間の図 16(b)の線OCと平行な線(破線)を引くと,点 P_c に達 する.また,モール空間上の点M'から,実空間の図 16(c)の線OM'と平行な線を引くと同様に点 P_c に達する. さらに,モール空間上の点fgから,実空間の図16(c)の 線FGと平行な線を引くと同様に点 P_c に達する.これに 加えて,モール空間上の点 λ'_1 から,ひずみ楕円の長軸方 向の線OL'と平行な線を引くと、点 P_c に達する.モール 円上のすべての点から,その点に対応する実空間での方向

に線を引くと、それらは一つの点 P_c に集まる.この点 P_c (添字 c は clockwise を示す)がモール円の極である。こ のモール円の極(以下,極と略記する)に,実空間のひず み楕円の中心を置くと、点 P_c において、 $\lambda'_1 \ge P_c$ を結ぶ 線(実空間ではひずみ楕円の長軸方向)に対する着目線の なす角(図16(a)の反時計回りの θ' , θ'' ,時計回りの θ') は、実空間の角度および測角方向がそのまま表示される. つまり、極に位置づけられたひずみ楕円の長軸の方向に対 する着目線のなす角は、モール空間と実空間とで一致し、 ひずみ楕円中のあらゆる着目線の方向に線を伸ばしたとき のモール円との交点が、その着目線の方向の λ' と γ/λ を 表す. 実空間とモール空間の対応づけは極を用いることで 容易になり、極を位置づけるために必要な測定は、単純せ ん断の場合,点λ'1からOL'方向と平行な線を伸ばすため に必要な実空間の角度 θ'(ひずみ楕円の長軸方向がせん断 面に対してなす角)だけである.



図 17 (a) モール円の極(点*P_c*)と利用方法(点*hi*, γ_{*hi*})の 例示.(b)図 12の*H*''を着目線とした時の測角の例.詳細は本 文参照.

単純せん断帯において、ひずみ楕円の長軸方向がせん断 面に対してなす角 θ' が得られたなら、モール円を描き極 が位置づけられる。極から線を引いて $\lambda' \ge \gamma/\lambda$ を知る様 子を、図12のHT'を着目線として図17に例示する(【Eq. 12】、図12の説明ではOH'に着目していたことに注意す る)、図17(a)では、極 P_c にひずみ楕円が位置づけられ、 ひずみ楕円長軸方向に対し点fgから極に伸ばした破線方 向がなす角は θ' で、ひずみ楕円の主軸方向に伸ばした破 線がせん断ひずみを持たない点(λ'_1 , 0),(λ'_2 , 0)に至 る様子が示されている。ここで、極 P_c から図12のHT' 方向の線をモール円の内側へ向かって伸ばしたとき、モー ル円と交わる点 hi の座標が HT 方向の線の $\lambda' \geq y/\lambda$ の 値を与える.この線がひずみ楕円長軸 (OL'方向)となす 角は、図 17(b) に示すように時計回りに $\theta''' であるが、角度$ $\theta''' は測定しなくても、実空間の HT 方向と平行な線を極 P_c$ から引けば良い (測角不要となることは極を用いる利点である. $なお、<math>\theta''' = 90 - \psi - \phi'$ (図 12)である).点 hi と点 A を 結ぶと、反時計回りの角 ψ_a' が得られ、角せん断 ψ' は角度の 絶対値が等しい時計回りの角となり、【Eq. 1】によりせん断ひ ずみ y が得られる.モール円の作図からせん断ひずみを求め る場合、モール円の縦軸の座標は y/λ であり、せん断ひず み y は横軸 1 の値を見る必要がある.この例の場合、HT 方向 の着目線のせん断ひずみ γ_{hi} は、図中の線 Ahi から横軸 (λ' = 1)へ下した垂線の長さ γ_{hi} で、方眼 4 目盛が 1 であること から $\gamma_{hi} \approx 0.8$ 程度で時計回りとなる.

ここまでで、教科書的文献に掲載されている代表的なひ ずみの関連式の、可能なものについては幾何学的図解を用 いた解説と、モール円および極の解説を終え、最後に作図 法を課題に適用しながら説明する.掲載しきれない他の多 くの単純せん断や、単純せん断以外の非共軸変形、共軸変 形の関連式については稿を改めることとしたい.

6. 作図による課題のひずみ解析

ここでは、図4に示した課題の case A と case B の layer 4 を 対象として、図18 と図19の作図によるひずみ解析を例示する.

Case A (ひずみ楕円の長軸方向 θ 'から、 γ , R を図解で 求める)

図 18 により、作図手順を説明する. このうち、手順⑤



図 18 ひずみ楕円の長軸方向(面構造)の方向 θ'から,せん断ひずみγとひずみ楕円の軸比 R を作図で求める方法の例.説明は本文参照.

で 45 度の線を引く理由は,図 6 などにおいて点 F から引 かれている線 FB と線 FC とが, $\theta' + \theta = 90^{\circ}$ であること から 45 度の方眼対角線を対称線としているためである.図 10 と比較しながら手順を追うとわかりやすいと思われる. 手順

- ①;方眼紙上に基点①を決める.
- ②;せん断帯の方向②の線を書く。
- ③;基点①から,(layer 4のθ'の)線③を引く.(野外では, 角度の値はなくてもよく,注目地点の面構造と平行 な線を引く.)
- ④;適当な目盛線と線③の交点④を決め、基準長さ1を定める.ここでは方眼5日盛を1とする.
- ⑤;基点①からの線(方眼の対角線)⑤を引く.
- ⑥;線⑤に対する点④の対称点⑥を決める。
- ⑦;基点①から点⑥を通る線⑦を引く.
- ⑧;点④から線②と平行な線を線⑦まで引き,交点⑧とする.点④から点⑧の長さが基準長さ1に対するせん断ひずみ(y)である.ここでは、およそ6目盛であり、せん断ひずみは6/5で約1.2である.
- ⑨;点④から線②へ下ろした垂線の足を点⑨とする。
- ⑩;点⑨から線⑦まで引き、交点⑩とし、点⑨から点⑩までの長さが基準長さ1に対するひずみ楕円の軸比(R)である。ここでは点⑨から点⑩までおよそ15目盛であり、ひずみ楕円の軸比は約3である。

この作図で得られたひずみの概要は、 $y \approx 1.2$, $R \approx 3$ で ある. 作図から明らかなように、面構造とせん断帯の方向 のなす角が小さくなると、R は野帳等に収まらなくなる. その場合には、図 10 で見たように図 10 の $\overline{TS} = 1/R$ の関 係を用いることができる.図 10 で $\overline{TS} = \overline{VA}$ であり、図 18 では⑧の点から②で引いた線に対する垂線と、線③の 交点が V となる.また、 θ' が 10 度以下の場合には、図 18 の点①と点⑨の距離が X であることから図 11 を用い、 X≈y, y²≈Rを用いればよい. 方眼1目盛を高さ1とす れば, X は方眼のマス目を数えるだけで得られる.

- Case B(単純せん断帯内外の構造の角度 *α*, *α*'から, *γ*, *R*を図解で求める)
- 図 19(a) により手順を説明する.図5 および図 10 と比較しながら手順を追うとわかりやすいと思われる.
- ①;方眼紙上に基準線①を引く.
- ②;せん断帯直交方向の基準となる長さ(幅)1を決めて 平行な線②を引く.ここでは5目盛とした.
- ③;線②上で,方眼の任意の交点③を決める.
- ④;点③から、50°(図4のα)の線を基準線①に向かっ て引き、交点④を決める.(野外では、角度の値はな くてもよく、注目地点の非変形部の岩脈等の方向と 平行な線を引く、次の手順⑤でも同様.)
- ⑤;交点④から26°(layer 4のα)の線を線②に向かっ て引き,交点⑤を決める.点③から点⑤の長さが基 準長さ1に対するせん断ひずみ(γ)である.ここ では、およそ6目盛であり、せん断ひずみは6/5で 約1.2である.
- ⑥;点③と点⑤の中点⑥を決める.
- ⑦;点⑥から基準線①へ下した垂線の足を点⑦とする.
- ⑧;点③と点⑦の距離(破線)を測る。
- ⑨;線①上に点⑦からの距離が⑧で測った距離となる点⑨
 を決める.
- 10;点9から点3を通る線10を引く.
- ⑪;点⑤から基準線①へ下した垂線の足を点⑪とする.
- ⑫;点⑪から点⑤を通り線⑩との交点を⑫とする. 点⑪から 点⑫までの長さが基準長さ1に対するひずみ楕円の軸比
 (R)である. ここでは点⑪から点⑫まで16 目盛程度であり,ひずみ楕円の軸比は16/5で約3.2である.

この作図で得られたひずみの概要は、 y≈1.2, R≈3.2



図 19 変形前の岩脈等の方向 α と変形後の方向 α'から,せん断ひずみ γ とひずみ楕円の軸比 R を作図で 求める方法の例.説明は本文参照.

である.本来ならば, case A でも case B でも同じ y と R が得られなければならない. y については両 case とも同 程度であるが, R は case B の作図の際に生じる不正確さ が大きいと思われる.これは, case A では, 手順⑤と⑥で, 対称点を基点①から離して作成することで, 手順⑦で引く 長い線の振れ幅を小さく抑えることが可能であるのに対 し, case B では, 点⑨の作図時の誤差に加え, 点⑨から 点③までの距離が短いために線⑩の作図時(外挿的な作図 となる)に振れ幅が大きくなりやすいことによると考えら れる.したがって, 図 10 の $\overline{TS} = 1/R$ の関係を積極的に 用いた方が, 内挿的な作図となるために誤差が少なくなる であろう.その手順を図 19(b) で示す.手順⑨までは同じ であり, 手順⑩以降を⑩'のように示す.

10'; 点9から点5を通る線10'を引く.

①';点③から基準線①へ下した垂線の足を点①'とする.

(2); 手順⑪, と手順⑪, で引いた線の交点を⑫, とし, 点
 (1), から点⑫, までの長さが基準長さ1に対するひずみ楕円の軸比の逆数(1/R)である.ここでは点⑪, から点⑫, まで1.6 目盛程度であり,ひずみ楕円の軸比は5/1.6 で約3.1 となり, case A で得られた値に近づいている.

case A と case B とでは,ひずみ楕円の軸比については ばらつきがみられるものの,せん断ひずみの値については おおむね一致しており,作図によるせん断ひずみの概要把 握法が例示できたと考えられる.ひずみ楕円の軸比につい ても,作図による正確度の低下を考慮すれば,その概要把 握に有用な場合があると考えられる.

7. まとめ

本報告では、構造地質学の基礎的技法の一つである有限 ひずみの解析に用いられる関係式群について、可能な限り 図解を用いて解説した.また、仮想的な単純せん断帯につ いて、作図によるせん断ひずみの概要把握法を例示した. 用いられた図解は一例であり、技術者ごとに多様な技法の 蓄積があると思われるが、基本的内容ゆえに論文や教科書 の形で示されることは少ない.しかし、ひずみに関する式 群の幾何学的な説明は、技法の可視化であるとともに、非 専門家にとっては構造地質学の専門書の解説ともなりえ る.本技術報告が、変動帯の理解に重要な構造地質学的視 点の提供や共有に役立てば幸いである.

謝辞

本報告執筆の契機は,高速増殖原型炉もんじゅ敷地内破 砕帯の追加地質調査等における変形構造の観察であり,調 査では多くの地質コンサルタントの技術者ならびに研究者 のご協力を賜りました.また本報告は,北海道大学竹下徹 教授と匿名の査読者のご指摘により大幅に改善されまし た.曽根原崇文編集委員会委員長には編集の労を取ってい ただくとともに,原稿の改善に向けた非常に多くのご助言 をいただきました.以上の方々に対し謝意を表します.

引用文献

- 天野一男・狩野謙一 (2009) 構造地質学. 日本地質学会フィールド ジオロジー刊行委員会編, フィールドジオロジー 6, 共立出版, 東京, 177p.
- Boulanger, P. and Hayes, M. (2002) A note on maximum shear. Journal of Elasticity, 69, 215-222.
- Burg, J. P. and Laurent, P. (1978) Strain analysis of a shear zone in a granodiorite. *Tectonophysics*, 47, 15-42.
- Fagereng, Å. (2013) On stress and strain in a continuousdiscontinuous shear zone undergoing simple shear and volume loss. *Journal of Structural Geology*, 50, 44-53.
- Fossen, H. (2016) Structural Geology, second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 524p.
- Harker, A. (1885) On slaty cleavage and allied rock-structures, with special reference to mechanical theories of their origin. *Report of the fifty-fifth meeting of the British Association for the advancement of science*, 813-852.
- ジェーガー, J. C. (飯田汲事, 訳) (1968) 弾性・破壊・流動論―工 学および地球科学への応用―. 共立出版, 東京, 213p.
- 垣見俊弘・加藤碵一 (1994) 地質構造の解析一理論と実際一. 愛智 出版, 東京, 274p.
- 金川久一 (2011) 地球のテクトニクス II 構造地質学. 大谷栄治,長谷川昭, 花輪公雄 編,現代地球科学入門シリーズ, 10, 共立出版, 東京, 253p.
- 狩野謙一·村田明広 (1998) 構造地質学. 朝倉書店, 東京, 298p.
- 中川鶴太郎・神戸博太郎 (1959) レオロジー. みすず書房, 東京, 763p.
- 中島 隆・高木秀雄・石井和彦・竹下 徹 (2004) 変成・変形作 用. 日本地質学会フィールドジオロジー刊行委員会編, フィー ルドジオロジー 7, 共立出版, 東京, 194p.
- Park, R. G. (1997) Foundations of Structural Geology, third edition. Chapman & Hall, London, 202p.
- Ragan, D. M. (2009) Structural Geology: an introduction to geometrical techniques, fourth edition. Cambridge University Press, Cambridge, 602p.
- Ramsay, J. G. (1967) Folding and Fracturing of Rocks. McGraw-Hill, New York, 568p.
- Ramsay, J. G. (1980) Shear zone geometry: a review. Journal of Structural Geology, 2, 83-99.
- Ramsay, J. G. and Huber, M. I. (1983) The Techniques of Modern Structural Geology, Volume 1: strain analysis, Academic Press, London, 307p.
- 平 朝彦・末広 潔・廣井美邦・巽 好幸・高橋正樹・小屋口剛博・ 嶋本利彦 (1997) 地殻の形成. 岩波講座地球惑星科学, 8, 岩波 書店, 東京, 260p.
- Treagus, S. H. (1981) A simple-shear construction from Thomson & Tait (1867). *Journal of Structural Geology*, **3**, 291-293.
- Treagus, S. H. (1987) Mohr circles for strain, simplified. Geological Journal, 22, 119-132.
- Wettstein, A. (1886) Über die Fischfauna des Tertiären Glarnerschiefers. Abhandlungen der Schweizerischen Paläontologischen Gesellschaft, 13, 1-103.
- 山路 敦 (2016a) 歪み解析と変形解析の数理:1. 一様変形. 地質 学雑誌, 122, 275-286.
- 山路 敦 (2016b) 歪み解析と変形解析の数理:2. 微小変形とその 地質学的計測. 地質学雑誌, 122, 551-562.